FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

FGV Management

MBA em Finanças Empresariais

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Marcus Vinicius Quintella Cury, D.Sc.

mvqc@fgvmail.br

FGV management

Realização Fundação
Getulio Vargas
FGV Management

Cury, Marcus Vinicius Quintella
Matemática Financeira 1ª Rio de Janeiro: FGV Management – Cursos de Educação Continuada.
37p.

Bibliografia

1. Finanças 2. Avaliação de Investimentos I. Título

Coordenação Executiva do FGV Management: Prof. Ricardo Spinelli de Carvalho
Coordenador Geral da Central de Qualidade: Prof. Carlos Longo
Coordenador de Área:

Sumário

1. Programa da disciplina

1.1 Ementa

Juros simples. Conceito de juros simples. Desconto de duplicatas. Desconto de títulos. Valor de face e valor de mercado. Juros compostos. Conceito de juros compostos. Valor do dinheiro no tempo. Valor presente e valor futuro. Valor presente líquido e taxa interna de retorno. Taxa de desconto. Valor e custo. Problemas da TIR. Equivalência de taxas de juros. Períodos de capitalização. Taxas anuais, mensais e diárias. Equivalência de fluxos de caixa. Perpetuidades e anuidades. Sistemas de amortização.

1.2 Carga horária total

24 horas/aula

1.3 Objetivos

1.3.1 Proporcionar aos participantes uma sólida base conceitual da matemática financeira, para servir de ponto de partida para estudos mais avançados em finanças e análise de investimentos.

1.3.2 Oferecer um quadro referencial que permita a imediata aplicação dos conceitos apresentados.

1.3.3 Promover a troca de experiência entre o professor e os participantes, por meio de estudos de casos práticos.

1.4 Conteúdo programático

Definição de taxa de juros. O valor do dinheiro no tempo. Diagrama dos fluxos de caixa. Tipos de formação de juros: simples e compostos. Relações de equival6encia de capitais. Taxas de juros nominais e efetivas. Taxas de juros equivalentes. Inflação e correção monetária. Taxas de juros reais e aparentes. Taxas de juros pré e pós-fixadas. Sistemas de amortização. Exercícios resolvidos e propostos.

1.5 Metodologia

Aulas expositivas, estudos de caso, trabalhos em grupo e debates.

1.6 Critérios de avaliação

O grau final da disciplina será composto da seguinte forma: (a) avaliação individual, sob a forma de prova, a ser aplicada após o término da disciplina, no valor de 6 (seis) pontos; (b) trabalhos práticos, individuais ou em grupo, a serem realizados em sala ou em casa, no valor total de 4 (quatro) pontos.

1.7 Bibliografia recomendada

ASSAF NETO, A., **Matemática Financeira e suas Aplicações**, São Paulo, Editora Atlas, 1994.

LAPPONI, J. C., **Matemática Financeira Usando o EXCEL**, São Paulo, Lapponi Treinamento e Editora, 1995.

Curriculum resumido do professor

Marcus Vinicius Quintella Cury é Doutor em Engenharia de Produção pela COPPE/UFRJ, Mestre em Transportes pelo IME, Pós-Graduado em Administração Financeira pela EPGE/FGV e Engenheiro Civil pela Universidade Veiga de Almeida. Sua experiência profissional tem como referência a atuação como engenheiro da Companhia Brasileira de Trens Urbanos (CBTU), desde 1985, e a ocupação da chefia, por oito anos, do Departamento de Controle Financeiro de Contratos desta empresa. Sua experiência acadêmica tem como destaque as atuações como professor dos cursos de pós-graduação da COPPE/UFRJ, IBMEC, EPGE/FGV e do IME. Como consultor empresarial, atua como diretor da MARVIN Consultoria e Treinamento Ltda (www.marvin.pro.br).

2. Matemática Financeira

2.2 Conceitos de Matemática Financeira

2.2.1 Definição de Taxa de Juros

Uma taxa de juros, ou taxa de crescimento do capital, é a taxa de lucratividade recebida num investimento. De uma forma geral, é apresentada em bases anuais, podendo também ser utilizada em bases semestrais, trimestrais, mensais ou diárias, e representa o percentual de ganho realizado na aplicação do capital em algum empreendimento.

Por exemplo, uma taxa de juros de 12% ao ano indica que para cada unidade monetária aplicada, um adicional de R$ 0,12 deve ser retornado após um ano, como remuneração pelo uso daquele capital. (Thuesen, 1977)

A taxa de juros, simbolicamente representada pela letra **i**, pode ser também apresentada sob a forma unitária, ou seja, 0,12, que significa que para cada unidade de capital são pagos doze centésimos de unidades de juros. Esta é a forma utilizada em todas as expressões de cálculo.

A taxa de juros também pode ser definida como a razão entre os juros, cobráveis ou pagáveis, no fim de um período de tempo e o dinheiro devido no início do período. Usualmente, utiliza-se o conceito de taxa de juros quando se paga por um empréstimo, e taxa de retorno quando se recebe pelo capital emprestado.

Portanto, pode-se definir o juro como o preço pago pela utilização temporária do capital alheio, ou seja, é o aluguel pago pela obtenção de um dinheiro emprestado ou, mais amplamente, é o retorno obtido pelo investimento produtivo do capital. Genericamente, todas as formas de remuneração do capital, sejam elas lucros, dividendos ou quaisquer outras, podem ser consideradas como um juro.

Quando uma instituição financeira decide emprestar dinheiro, existe, obviamente, uma expectativa de retorno do capital emprestado acrescido de uma parcela de juro. Além disso, deve-se considerar embutido na taxa de juros os seguintes fatores: (Thuesen, 1977)

- **Risco -** grau de incerteza de pagamento da dívida, de acordo, por exemplo, com os antecedentes do cliente e sua saúde financeira;
- **Custos Administrativos -** custos correspondentes aos levantamentos cadastrais, pessoal, administração e outros;
- **Lucro -** parte compensatória pela não aplicação do capital em outras oportunidades do mercado, podendo, ainda, ser definido como o ganho líquido efetivo;

- **Expectativas Inflacionárias** - em economias estáveis, com inflação anual baixa, é a parte que atua como proteção para as possíveis perdas do poder aquisitivo da moeda.

2.2.2 O Valor do Dinheiro no Tempo

O conceito do valor do dinheiro no tempo surge da relação entre juro e tempo, porque o dinheiro pode ser remunerado por uma certa taxa de juros num investimento, por um período de tempo, sendo importante o reconhecimento de que uma unidade monetária recebida no futuro não tem o mesmo valor que uma unidade monetária disponível no presente.

Para que este conceito possa ser compreendido, torna-se necessário a eliminação da idéia de inflação. Para isso, supõe-se que a inflação tecnicamente atinge todos os preços da mesma forma, sendo, portanto, anulada no período considerado.

Assim, **um dólar hoje vale mais que um dólar amanhã**. Analogamente, **um real hoje tem mais valor do que um real no futuro**, independentemente da inflação apurada no período.

Esta assertiva decorre de existir no presente a oportunidade de investimento deste dólar ou real pelo prazo de, por exemplo, 2 anos, que renderá ao final deste período um juro, tendo, conseqüentemente, maior valor que este mesmo dólar ou real recebido daqui a 2 anos.

Conclui-se, pelo fato do dinheiro ter um valor no tempo, que a mesma quantia em real ou dólares, em diferentes épocas, tem outro valor, tão maior quanto a taxa de juros exceda zero. Por outro lado, pode-se dizer que este dinheiro varia no tempo em razão do poder de compra de um real ou dólar ao longo dos anos, dependendo da inflação da economia, como será visto adiante.

2.2.3 Diagrama dos Fluxos de Caixa

Para identificação e melhor visualização dos efeitos financeiros das alternativas de investimento, ou seja, das entradas e saídas de caixa, pode-se utilizar uma representação gráfica denominada **Diagrama dos Fluxos de Caixa** *(Cash-Flow).*

Este diagrama é traçado a partir de um eixo horizontal que indica a escala dos períodos de tempo. O número de períodos considerado no diagrama é definido como o *horizonte de planejamento* correspondente à alternativa analisada. (Oliveira, 1982)

Cabe ressaltar que é muito importante a identificação do ponto de vista que está sendo traçado o diagrama de fluxos de caixa. Um diagrama sob a ótica de uma instituição financeira que concede um empréstimo, por exemplo, é diferente do diagrama sob a ótica do indivíduo beneficiado por tal transação(Thuesen, 1977).

A figura 2 mostra um exemplo de um diagrama genérico de um fluxo de caixa. Convencionou-se que os vetores orientados para cima representam os valores positivos de caixa, ou seja, os benefícios, recebimentos ou receitas. Já os vetores orientados para baixo indicam os valores negativos, ou seja, os custos, desembolsos ou despesas.

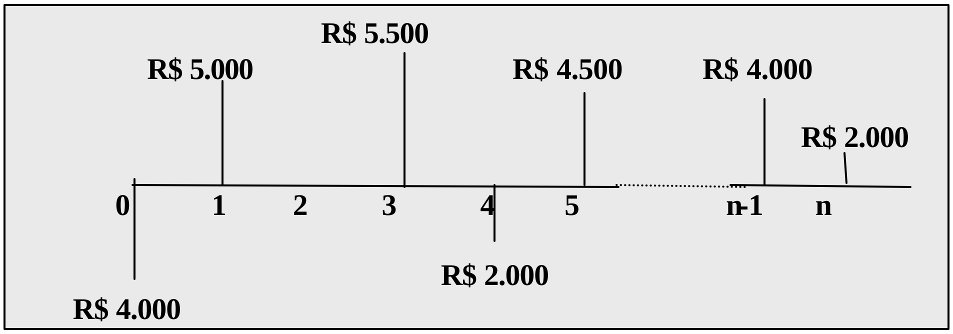


FIGURA 2 - Representação de um Diagrama de Fluxo de Caixa

No presente trabalho será adotada a notação definida abaixo, em todos os diagramas de fluxo de caixa estudados:

i - taxa de juros para determinado período, expressa em percentagem e utilizada nos cálculos na forma unitária.
Ex.: rendimento de dez por cento ao ano ⇨ i = 0,10 ou 10 % a.a.

n - número de períodos de capitalização.
Ex.: aplicação de um capital por 5 meses ⇨ n = 5

P - valor equivalente ao momento presente, denominado de Principal, Valor Presente ou Valor Atual.
Ex.: aplicação de R$ 10.000 efetuada hoje ⇨ P = 10.000

J - juros produzidos ou pagos numa operação financeira.
Ex.: um capital de R$ 5.000 rendeu R$ 300 ao final de 1 ano ⇨ J = 300

M - valor situado num momento futuro em relação à **P**, ou seja, daqui a **n** períodos, a uma taxa de juros **i**, denominado Montante ou Valor Futuro.
Ex.: uma aplicação de R$ 15.000, feita hoje, corresponderá a R$ 19.000 daqui a n períodos, a uma taxa de juros i ⇨ M = 19.000

R - valor de cada parcela periódica de uma série uniforme, podendo ser parcelas anuais, trimestrais, mensais etc.
Ex.: R$ 5.000 aplicados mensalmente numa caderneta de poupança produzirá um montante de R$ 34.000 ao fim de n meses ⇨ R = 5.000

A notação para os elementos da Matemática Financeira varia para cada autor. Desta forma, não é recomendável a memorização de uma só notação nem sua adoção como padrão. Recomenda-se o aprendizado dos conceitos fundamentais da Matemática Financeira, independentemente da notação utilizada, de modo que qualquer problema possa ser resolvido.

Por convenção, todas as movimentações financeiras, representadas em cada período dos diagramas de fluxo de caixa, estão ocorrendo no final do período. Por exemplo, um pagamento efetuado no segundo ano de um diagrama de fluxo de caixa significa que esta saída de dinheiro ocorreu no final do ano 2.

2.2.4 Tipos de Formação de Juros

Os juros são formados através do processo denominado regime de capitalização, que pode ocorrer de modo simples ou composto, conforme apresentado a seguir:

2.2.4.1 Juros Simples

No regime de capitalização a juros simples, somente o capital inicial, também conhecido como principal **P**, rende juros. Assim, o total dos juros **J** resultante da aplicação de um capital por um determinado período **n**, a uma taxa de juros dada, será calculado pela fórmula:

$$\boxed{J_n = P \, . \, n \, . \, i} \qquad (1)$$

A taxa de juros deverá estar na mesma unidade de tempo do período de aplicação, ou seja, para um período de **n** anos, a taxa será anual.

Logo, pode-se calcular o total conseguido ao final do período, ou seja, o montante **M**, através da soma do capital inicial aplicado com o juro gerado. O montante pode ser expresso, para este caso, por: $M = P + J$, originando a fórmula $M = P\,(l + i.n)$.

Nos meios econômico e financeiro, o emprego de juros simples é pouco freqüente. O reinvestimento dos juros é prática usual e a sua consideração na consecução de estudos econômico-financeiros deve ser levada em conta, até mesmo por uma questão de realismo. (Oliveira, 1982) Assim, o presente texto será desenvolvido consoante os princípios da capitalização a juros compostos, que será visto no próximo item.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 01

Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado por 3 meses, a juros simples. Calcule o valor a ser resgatado no final deste período à taxa de 4 % a.m.

- juros acumulados: $J_3 = 10.000 \, . \, 3 \, . \, 0{,}04 = 1.200$
- como M = J + P, o valor resgatado será: M = 1.200 + 10.000 = 11.200 ☜

2.2.4.2 Juros Compostos

No regime de capitalização a juros compostos, os juros formados a cada período são incorporados ao capital inicial, passando também a produzir juros.

A expressão que permite quantificar o total de juros resultante da aplicação de um principal **P**, a uma taxa de juros **i**, durante **n** períodos, é mostrada a seguir:

$$\boxed{J_n = P \, . \, [\,(1 + i)^n - 1\,]} \qquad (2)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 02

Calcule os juros pagos numa aplicação de R$ 5.000 por 6 meses, à taxa de 2,5 % a.m., sob o regime de juros compostos.

- juros em 6 meses: $J_6 = 5.000 \cdot [(1+0,025)^6 - 1] = 798,47$ ☜

2.2.4.3 Juros Simples X Juros Compostos

A partir das definições acima, pode-se perceber que os resultados de uma mesma operação sob o regime de juros simples, que evolui de forma linear, e sob o regime de juros compostos, que segue a forma exponencial, sempre sofrerão uma defasagem crescente em função do aumento dos períodos de tempo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 03

Montar um quadro comparativo de um empréstimo de R$ 1.000,00, à taxa de 8 % a.a., em 4 anos, considerando os regimes de juros simples e compostos:

ANO	PRINCIPAL (Início do Ano)	JUROS PRODUZIDOS	MONTANTE (Final do Ano)
1	1000,00	80,00	1080,00
2	1000,00	80,00	1160,00
3	1000,00	80,00	1240,00
4	1000,00	80,00	1320,00
1	1000,00	80,00	1080,00
2	1080,00	86,40	1166,40
3	1166,40	93,31	1259,71
4	1259,71	100,78	1360,49

2.2.5 Relações de Equivalência de Capitais

Baseado no que foi colocado sobre o valor do dinheiro no tempo, surge o conceito de equivalência de capitais, isto é, um total de dinheiro pode ser equivalente a um total diferente, em diferentes instantes de tempo, sob certas condições específicas, a juros compostos. (Oliveira, 1982)

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 04

Considere um empréstimo de R$ 10.000,00 que deve ser resgatado ao final de 3 anos, conjuntamente aos juros acumulados, cuja taxa de juros é de 10 % ao ano:

- juros acumulados ao final de 3 anos, calculados pela expressão (2):
  $J_3 = 10.000 \ . \ [(1 + 0{,}10)^3 - 1] = 3.310$
- como M = J + P, o montante no 3º ano será: M = 3.310 + 10.000 = 13.310
- conclusão: R$ 10.000, hoje, equivale a R$ 13.310, daqui a 3 anos, à 10 % a.a ☜

Este conceito de equivalência entre capitais, a juros compostos, é particularmente importante em análise de projetos, devido ao fato das alternativas de investimento freqüentemente envolverem recebimentos e desembolsos em diferentes instantes de tempo, indistintamente denominados variações de caixa ou pagamento. As principais relações de equivalência de capitais, a juros compostos, são apresentadas a seguir.

2.2.5.1 Acumulação de Capital

A acumulação de um capital inicial, ou principal **P**, é o valor futuro, ou o montante **M**, resultante da aplicação deste capital a juros compostos, durante um período **n** e a taxa de juros **i**. O diagrama do fluxo de caixa desta situação é mostrado na figura 3 e o valor acumulado de capital, nestas condições, pode ser calculado pela fórmula:

$$\boxed{M = P \ . \ (1 + i)^n} \qquad (3)$$

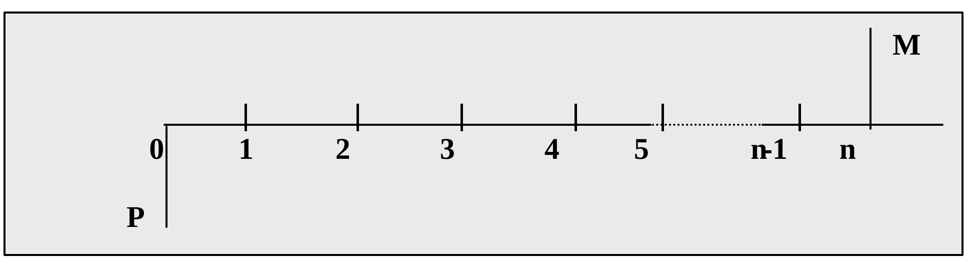


FIGURA 3 - Diagrama de uma Série de Acumulação de Capital

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 05

Determinar o valor a ser resgatado ao final de 6 meses, considerando-se a aplicação de R$ 10.000,00, hoje, a uma taxa de 2,5 % a.m.

- montante ao final de 6 meses: $M = 10.000 \ . \ (1 + 0{,}025)^6 = 11.596{,}93$ ☜

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 06

Calcular a taxa implícita numa aplicação que produziu o montante de R$ 58.000,00, a partir de um capital de R$ 50.000,00, em 4 anos.

- aplicando a expressão (3): $58.000 = 50.000.(1+ i)^4 \therefore i = (58.000/50.000)^{1/4} - 1$

$\therefore i = 0,0378 \Rightarrow i = 3,78$ % a.m. ☜

2.2.5.2 Valor Presente

O valor presente, ou valor atual, de uma certa quantia numa data futura é o valor equivalente à quantia em questão na data zero, a uma taxa de juros **i**.

Sendo assim, conclui-se ser o recíproco da situação descrita para o cálculo do valor acumulado, podendo-se utilizar a seguinte expressão para o cálculo do valor presente:

$$P = M . \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \qquad (4)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 07

Determine a quantia que deve ser investida, hoje, a fim de acumular R$ 100.000,00, em 5 anos, à uma taxa de 10 % a.a.

- valor atual pela fórmula (4): $P = 100.000.(1+ 0,10)^{-5} = 62.092,13$ ☜

2.2.5.3 Série Uniforme de Pagamentos

Pode-se definir uma série uniforme de pagamentos como uma sucessão de recebimentos, desembolsos ou prestações, de mesmo valor, representados por **R**, divididos regularmente num período de tempo.

O somatório do valor acumulado de vários pagamento, montante, é calculado pela expressão mostrada abaixo e representado no fluxo de caixa da figura 4. Este somatório é deduzido a partir da fórmula (3) para o cálculo do montante de cada pagamento **R**. Trata-se, portanto, do cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica limitada, de razão **q = 1 + i**.

$$M = R . \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \qquad (5)$$

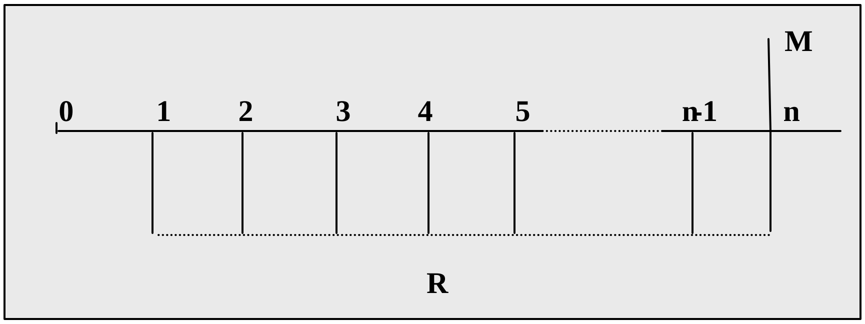


FIGURA 4 - Diagrama do Montante de uma Série Uniforme

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 08

Uma pessoa deposita anualmente R$ 5.000,00 numa conta especial particular. Qual será o saldo daqui a 5 anos, para uma remuneração de 8 % a.a. concedida pelo banco?

- utilizando a expressão (5): $M = 5.000.[(1+ 0,08)^5 - 1] / 0,08 = 29.333$ ☜

Procedendo-se o cálculo do inverso da expressão (5), pode-se obter o valor de um único pagamento ou prestação **R**, a partir do montante conhecido, através da seguinte expressão:

$$R = M \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \qquad (6)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 09

Determine o valor que deve ser depositado trimestralmente numa conta a prazo fixo, que oferece juros de 7,5 % a.t., para acumularmos R$ 25.000,00 em 2 anos.

- utilizando a fórmula (6), com n = 8, pois em 2 anos existem 8 trimestres:

$R = 25.000.\{0,075 / [(1+0,075)^8 - 1]\} = 2.393,18$ ☜

Ainda dentro do contexto de uma série uniforme de pagamento, deseja-se determinar o valor capaz de liquidar antecipadamente, e de uma só vez, um empréstimo ou financiamento, assumido de forma a ser pago em prestações uniformes e periódicas. Assim sendo, deve-se calcular a expressão do valor presente desta série uniforme pelo somatório dos valores atuais de cada uma das prestações, utilizando-se a fórmula (4). A figura 4 mostra esta situação e a expressão abaixo determina o referido valor presente. Neste caso também é utilizado o somatório dos termos de uma P.G. limitada, com razão **q = 1 / (1 + i)**.

$$P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \right] \quad (7)$$

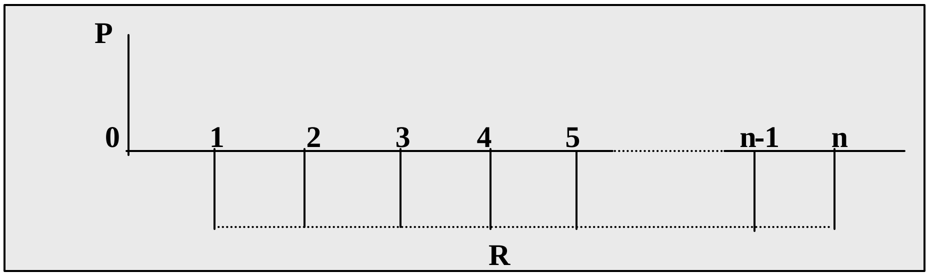


FIGURA 5 - Diagrama do Valor Presente de uma Série Uniforme

> **EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 10**
>
> Determine o valor à vista de um eletrodoméstico vendido em 6 prestações mensais de R$ 200,00, sabendo-se que os juros cobrados foram de 6 % a.m.
>
> - o valor atual da série de prestações uniformes é dado pela fórmula (7):
>
> $P = 200 . \{ [(1+ 0,06)^6 -1] / [0,06.(1+ 0,06)^6] \} = 983,46$ ☜

Para a determinação do valor de um pagamento ou prestação **R** quando o principal é conhecido, calcula-se o inverso da expressão (7), pois existe reciprocidade. Assim, o valor de **R** é obtido pela seguinte fórmula:

$$R = P \cdot \left[\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (8)$$

> **EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 11**
>
> Uma pessoa adquire um *freezer* por R$ 800,00, dando de entrada R$ 300,00. Determine a prestação mensal para um financiamento do restante em 4 meses, à taxa de 5 % a.m.
>
> - valor a ser financiado: P = 800 - 300 = 500;
> - valor da prestação-fórmula(8): P=500.{[0,05.(1+ 0,05)4]/[(1+ 0,05)4-1]}=141 ☜

2.2.5.4 Perpetuidade

A perpetuidade é um conjunto de valores periódicos, consecutivos e iguais, que ocorre indefinidamente. Trata-se, portanto, de uma série uniforme permanente, tal como uma pensão mensal vitalícia, um dividendo anual etc.

O valor presente de uma perpetuidade $\mathbf{P_\infty}$, deduzido a partir do cálculo do limite da expressão (7), com **n** tendendo ao infinito, pode ser encontrado pela fórmula:

$$\boxed{\mathbf{P_\infty = R / i}} \qquad \textbf{(9)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 12

Determine o valor teórico de um apartamento que rende mensalmente R$ 1.000, considerando-se a taxa de juros de mercado de 1,5 % a.m.

- como o aluguel mensal de um apartamento pode ser considerado uma perpetuidade, pela fórmula (9) chega-se ao seu valor teórico: $P_\infty = 1.000 / 0,015 = 66.700$ ☜

2.2.6 Taxas de Juros Nominais e Efetivas

Pode-se notar que em cálculos de capitalização composta as taxas de juros apresentadas são, na maioria das vezes, taxas nominais, que não correspondem às taxas realmente empregadas na operação. Por exemplo, se em certo empreendimento é proposta uma taxa de 12 % ao ano, com a capitalização dos juros acontecendo todos os meses, ou seja, 1 % ao mês, não será difícil demonstrar que a taxa anual realmente empregada é superior àquela dada inicialmente.

A taxa de 12 % a.a é, portanto, denominada **taxa nominal de juros**, já que a capitalização dos juros é mensal e a taxa está expressa em termos anuais. Desta forma, surge uma nova taxa anual, denominada de **taxa efetiva de juros**, que pode ser calculada utilizando-se a seguinte expressão:

$$\boxed{\mathbf{i_{ef} = \left[1 + \frac{i_n}{p} \right]^p - 1}} \qquad \textbf{(10)}$$

onde $\mathbf{i_n}$, corresponde à taxa nominal de juros, em bases anuais; **p** é o número de períodos de capitalização contidos num ano; e $\mathbf{i_{ef}}$ é a taxa efetiva de juros obtida, também em bases anuais. Assim, para o exemplo acima, a taxa efetiva é 12,68% a.a.

O quadro 1 apresenta as taxas efetivas anuais de juros correspondentes à taxa de 12% a.a., com capitalização anual, semestral, trimestral, mensal, semanal, diária e de forma contínua. Nesta última, considera-se que o juros possam ser capitalizados em infinitos períodos por ano. Deste modo, a taxa anual efetiva de juros é definida por: $\mathbf{i_{ef} = e^{in} - 1}$.

QUADRO 1 - Taxas Efetivas Anuais de Juros Correspondentes à Taxa Nominal de 12 % a.a.

Freqüência de Capitalização	Períodos de Capitalização	Taxa Efetiva por Período	Taxa Efetiva Anual
ANUAL	1	12,0000 %	12,0000 %
SEMESTRAL	2	6,0000 %	12,3600 %
TRIMESTRAL	4	3,0000 %	12,5509 %
MENSAL	12	1,0000 %	12,6825 %
SEMANAL	52	0,2308 %	12,7341 %
DIÁRIA	365	0,0329 %	12,7474 %
CONTÍNUA	¥	0,0000 %	12,7497 %

Em resumo, a taxa nominal de juros é aquela que o período de capitalização difere de seu período base. Por exemplo, uma taxa de juros de 24% ao ano com capitalização trimestral é dita nominal. Por outro lado, quando o período de capitalização coincidir com o período base da taxa de juros dada, esta taxa é dita efetiva. Assim, uma taxa de 8% ao mês com capitalização mensal é uma taxa efetiva.

2.2.7 Taxas de Juros Equivalentes

As taxas de juros que conseguem levar um certo principal a um mesmo montante, no regime de juros compostos, quando varia a freqüência de capitalização, são chamadas de **taxas equivalentes de juros**. Em outras palavras, duas ou mais taxas são equivalentes se aplicadas a um mesmo principal, durante um mesmo prazo, produzirem um mesmo montante no final deste prazo, a juros compostos:

$$\boxed{\mathbf{i_{eq} = (1 + i_{ef})^{k/p} - 1}} \qquad \mathbf{(11)}$$

onde $\mathbf{i_{eq}}$ é a taxa equivalente procurada, a juros compostos; **p** é o número de períodos de capitalização da taxa equivalente desejada contidos num ano; e **k** é o número de períodos de capitalização da taxa efetiva dada contidos num ano.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 13

Determine a taxa trimestral equivalente a uma taxa de juros de 10% a.a., num prazo de 6 anos e com capitalização anual.

- como existem 4 trimestres num ano, p = 4 e k = 1:
  $i_{eq} = (1 + 0{,}10)^{1/4} - 1 = 0{,}0241 \Rightarrow 2{,}41\ \%$ a.t.[21] ☜

Este resultado pode ser confirmado substituindo-se na expressão (3) as taxas equivalentes de 10 % a.a. e de 2,41 % a.t., com capitalização trimestral, durante 6 anos. Desta forma, para qualquer principal encontrar-se-á o mesmo montante.

Já no regime de juros simples, duas ou mais taxas de juros, relativas a diferentes períodos, são também consideradas equivalentes quando aplicadas ao mesmo principal, durante um mesmo prazo, produzirem um mesmo montante no final daquele prazo. Para diferençar, as taxas equivalentes a juros simples serão denominadas **taxas proporcionais**, cujo cálculo procede-se da seguinte forma:

$$\boxed{\mathbf{i_p = i / p}} \qquad \textbf{(12)}$$

onde $\mathbf{i_p}$ é a taxa proporcional procurada; **i** é a taxa de juros dada; e **p** é o número de períodos de capitalização da taxa proporcional desejada, contidos na base de capitalização da taxa de juros dada.

Para um melhor entendimento, considere uma taxa de juros anual. Caso pretenda-se encontrar as taxas proporcionais semestral e mensal, o valor de **p** da expressão (10) corresponderá a 2 e 12, respectivamente, pois em um ano estão contidos 2 semestres e 12 meses. Assim sendo, pela definição acima, 60 % a.a., 30 % a.s., 15 % a.t. e 5 % a.m. são consideradas taxas de juros proporcionais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 14

Determine as taxas de juros trimestral e mensal proporcionais à taxa de 12 % a.a.

- trimestral: p = 4 (4 trimestres num ano); i_p = 12 % / 4 = 3 % a.t. ☜
- mensal: p = 12 (12 meses num ano); i_p = 12 % / 12 = 1 % a.m. ☜

2.2.8 Inflação e Correção Monetária

2.2.8.1 Inflação

O excesso de moeda na economia gera inflação, que nada mais é que um aumento generalizado e sistemático dos preços face ao aumento da demanda dos bens de consumo e serviços. Já a deflação é caracterizada por um declínio sistemático de preços. (Wannacott e Wannacott, 1986)

O poder aquisitivo diminui quando existe inflação. Para uma inflação de 50%, num determinado mês, haveria uma perda do poder de compra da moeda de 33%. De fato, se uma mercadoria estivesse custando, no início do mês, R$100,00, passaria a custar, no final do mesmo mês, R$150,00, e, desta forma, o poder aquisitivo cairia de 100% para 67% (100/150), ou seja, haveria uma perda de 33%. (Hirschfeld, 1986)

A inflação talvez seja uma ilusão - a ilusão de que as pessoas podem e devem ganhar um aumento no preço dos produtos que vendem, sem que os preços dos outros produtos, que elas compram, aumentem. Está embutido no conceito de inflação *um fator psicológico*, que contribui, outrossim, para a alta dos preços, acarretando uma reação em cadeia e contribuindo para o desequilíbrio da economia.

As análises econômicas de projetos de investimento não levam em conta a inflação, baseado na premissa de que todos os preços envolvidos são por ela afetados uniformemente. Desta forma, tais análises são realizadas supondo-se condições estáveis da moeda, já que também seria impossível se prever, com exatidão, as condições futuras dos fluxos de caixa dos projetos. Obviamente esta é uma hipótese de natureza simplificadora e, por conseguinte, os resultados assim obtidos devem agregar um certo grau de erro associado.

Como num regime inflacionário existe perda de poder aquisitivo da moeda, de modo a evitar a corrosão do patrimônio do investido, todo capital aplicado deve ser indexado à taxa de inflação do período. Esta indexação poderia, outrossim, ser efetuada com a adoção de uma moeda estável, ou com inflação desprezível, tal como o dólar americano, objetivando-se a proteção do capital investido, ou através de índices econômicos de referência de preços.

Torna-se importante fixar corretamente o conceito de inflação, uma vez que existe alguma confusão com certos *aumentos* de preços. Um aumento esporádico de preço de um certo produto não significa necessariamente inflação, pois tal aumento pode ocorrer, por exemplo, em função de uma mudança na oferta e/ou demanda deste produto.

Como já foi definido, a inflação é uma tendência generalizada de aumentos nos preços. Toma-se um conjunto de bens que represente uma amostra significativa da produção da economia de um país e compara-se os preços destes bens nos instantes **t** e **t+1**. Caso tenha ocorrido um aumento nos preços de maior parte daqueles bens, isto caracteriza que houve inflação entre **t** e **t+1**.

2.2.8.2 Correção Monetária

A correção monetária, uma *invenção* brasileira, é uma taxa que tem o objetivo de tentar recompor o poder aquisitivo dos preços dos bens e serviços atingidos pela inflação, que pode ou não refletir integralmente as taxas de inflação. Um índice de correção monetária relativa a um setor da economia não é necessariamente igual à inflação ocorrida neste mesmo setor.

A correção monetária, ou atualização monetária, foi introduzida no Brasil, em 1964, com a criação das Obrigações Reajustáveis do Tesouro Nacional (ORTN), que reajustava mensalmente os preços dos bens e serviços, bem como das principais operações financeiras do país. A ORTN foi a origem de uma série de indexadores de correção monetária, tais como a OTN, BTN, URV e a TR, entre outros, sendo que este última teve seus objetivos iniciais desvirtuados, já que foi concebida para atuar efetivamente como uma taxa referencial de juros e não como um mecanismo de atualização monetária.

Muitas análises de projetos de investimento são desenvolvidas com base em projeções elaboradas à *moeda corrente* e de poder aquisitivo referente à uma data-base. Para que os efeitos da inflação possam ser incorporados nas análises de projetos, é necessário se utilizar os fatores de juros de modo que os efeitos inflacionários atuantes sobre a moeda, em diferentes instantes do tempo possam ser reconhecidos. O procedimento usual para se tratar com a perda no poder de compra que acompanha a inflação segue os seguintes passos: (Thuesen, 1977)

1) Estima-se todos os valores do fluxo de caixa associados ao projeto, em termos de moeda corrente do dia;
2) Modifica-se os valores estimados no passo 1 de modo que em cada data futura eles representem os valores naquela data, em termos de moeda da época;

3) Calcula-se a quantia equivalente do fluxo de caixa resultante do passo 2, considerando-se o valor do dinheiro no tempo.

Na realidade, a maioria das análises de projetos trabalham com *preços constantes*, isto é, a partir da suposição de que os preços e custos aumentam de acordo com as taxas de inflação, sejam elas quais forem, de maneira que seu valor permaneça constante, se expresso em moeda estável.

Entretanto, nem sempre é recomendável trabalhar com preços constantes, principalmente nos casos de alguns preços ou custos do projeto não acompanhem as taxas de inflação e sofram variações *reais* de preços, em função de fatores econômicos, tais como escassez, excesso de oferta, evoluções tecnológicas etc. A projeção de tais preços é assunto fora dos objetivos do presente texto. De qualquer modo, sabe-se que a previsão de preços em moeda estável é mais simples do que em moeda corrente, pois neste segundo caso precisa-se estimar também as taxas de inflação, além das variações reais dos preços.

2.2.8.3 Medição da Inflação (Assaf Neto, 1994)

Um índice de preços é resultante de um procedimento estatístico que, entre outras aplicações, permite medir as variações ocorridas nos níveis gerais de preços, de um período para outro. Em outras palavras, o índice de preços representa uma média global das variações de preços que se verificaram num conjunto de determinados bens, ponderada pelas respectivas quantidades.

No Brasil são utilizados inúmeros índices de preços, sendo originados de amostragem e critérios desiguais e elaborados por diferentes instituições de pesquisa. Antes de selecionar um índice para atualização de valores monetários, deve-se analisar a sua representatividade em relação aos propósitos em questão.

O quadro 2 relaciona os valores do Índice Geral de Preços - IGP, da Fundação Getúlio Vargas, de maio a dezembro de determinado ano.

QUADRO 2 - Índice Geral de Preços - IGP/FGV

Mês	Ago/96	Set/96	Out/96	Nov/96	Dez/96
IGP	132,679	132,849	133,141	133,517	134,689

Através da evolução destes índices de preços podem ser identificados como os preços gerais da economia variaram no período. Para tanto, relaciona-se o índice do fim do período que se deseja estudar com o do início.

A taxa de inflação, a partir de índices de preços, pode ser medida por:

$$\boxed{p = (I_1 / I_0) - 1} \qquad \textbf{(13)}$$

onde: **p** é a taxa de inflação procurada; I_1 representa o índice de preços relativo à data desejada, ou data-referência; e I_0 indica o índice relativo à data inicial, ou data base.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 15

Com base nos índices do quadro 1, calcule a inflação ocorrida entre os meses de agosto e dezembro de 1996:

- π = (134,689 / 132,679) - 1 = 1,0151 ⇨ 1,51% ☜

Desta forma, os ajustes para se conhecer a evolução real de valores monetários em inflação se processam mediante *indexações* (inflacionamento) e *desindexações* (deflacionamento) dos valores aparentes, através de índices de preços.

A indexação consiste em corrigir os valores aparentes de uma data em moeda representativa de mesmo poder de compra em momento posterior. A desindexação, ao contrário, envolve transformar valores aparentes em moeda representativa de mesmo poder de compra num momento anterior.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 16

Com base nos índices do quadro 3, analise se houve ganho ou perda numa transação que envolveu a aquisição de um bem em agosto por $200.000 e sua venda em novembro por $220. 000:

- Inflação do período: π = (133,517 / 132,679) - 1 = 1,00632 ⇨ 0,632%
- Valor do bem em dezembro (inflacionamento):
  P_1 = 1,00632 . 200.000 = 201.264,00
- Ganho (comparação na mesma data):
  220.000/201.264 = 1,09309 ⇨ + 9,309% ☜

O comportamento da inflação se processa de maneira exponencial, ocorrendo aumento de preço sobre um valor que já incorpora acréscimos apurados em períodos anteriores. Da mesma forma que o regime de juros compostos, a formação da taxa de inflação assemelha-se a uma progressão geométrica, verificando-se juros sobre juros. São válidos para a inflação os mesmos conceitos de juros compostos e de taxas de juros equivalentes, apresentados neste capítulo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 17

Determine a taxa de inflação acumulada nos três primeiros meses de 1996, sabendo-se que as taxas de inflação para janeiro, fevereiro e março do ano em questão, medidas pelo IGPM/FGV, foram, respectivamente, 1,73%, 0,97% e 0,40%.

- π_{acum} = [(1+0,0173).(1+0,0097).(1+0,004)] - 1 = 0,0313 ⇨ 3,13% ☜

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 18

A taxa de inflação de um determinado ano é de 25%. Determine a taxa mensal de inflação equivalente:

- π = 25% a.a. ⇨ $\pi_{MENSAL} = (1+0,25)^{1/12}$ -1 = 0,018769 ⇨ 1,88% a.m. ☜

2.2.9 Taxas de Juros Reais e Aparentes

Num contexto inflacionário, sabe-se que um capital **P** atingido por uma taxa de inflação **p** produz um montante $\mathbf{P_1 = P_0 \cdot (1 + p)}$, num determinado período. Corrigindo-se este montante a uma taxa de juros **i**, obtém-se outro montante $\mathbf{P_2 = P_0 \cdot (1 + p) \cdot (1 + i)}$, donde é deduzida a expressão da taxa aparente $\mathbf{i_A}$ de remuneração do capital inicial investido:

$$\boxed{\mathbf{i_A = [\,(1 + i) \cdot (1 + p)\,] - 1}} \qquad \mathbf{(14)}$$

A taxa de inflação comporta-se essencialmente como a fórmula de juros compostos. Se, por exemplo, um produto custa hoje R$100 e a taxa de inflação é de 20% ao mês, deverá ser vendido no próximo mês a R$120, no mês seguinte a R$144, e assim por diante, de modo a compensar a desvalorização sofrida pela moeda.

A avaliação econômico-financeira de projetos é realizada usualmente a preços constantes, ou seja, a preços relativos a uma data-base, produzindo a mensuração da rentabilidade real do referido projeto. Numa economia inflacionária, entretanto, os preços são continuamente indexados aos valores relativos à data-base do projeto, implicando na correção dos valores futuros de fluxo de caixa em relação àquela referência. Conseqüentemente, obtém-se uma taxa aparente de retorno relacionada à taxa real de retorno, que seria obtida se o estudo fosse efetuado à moeda constante, através da equação (14).

Em resumo, a taxa aparente de juros **p** é uma *taxa de juros* composta de uma parcela de juros real e outra de inflação, ou seja é uma taxa de juros que traz embutida a inflação em curso. Já a taxa de juros **i** é uma taxa teoricamente *pura*, ou seja, é uma taxa que reflete o juro efetivamente envolvido numa operação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 19

Num determinado momento da economia, cuja inflação está em torno de 2 % a.m., quanto renderia. em termos reais, uma aplicação de capital oferecida a 5 % a.m.?

- Como a taxa oferecida é a taxa aparente, i_A = 5 % a.m., torna-se necessário alterar a disposição da expressão (14) para o cálculo da taxa real de juros:

$i = [(1+ i_A) / (1+ \pi)] - 1 \therefore i = [(1+0,05) / (1+0,02)] - 1 = 0,0294 \Rightarrow 2,94\%$ a.m. ☜

2.2.10 Taxas de Juros Pré-Fixadas e Pós-Fixadas

As taxas de juros pré-fixadas incorporam os componentes básicos que formam as taxas de juros em seu sentido pleno, ou seja, o lucro, os custos, o risco e a expectativa inflacionária. Em resumo, a taxa de juros pré-fixada é composta por juros real mais inflação embutida. As operações financeiras com juros pré-fixados permitem o conhecimento prévio, no momento da aplicação, da taxa de juros que irá remunerar o capital investido.

As taxas de juros pós-fixadas não incorporam as expectativas inflacionárias em sua formação, pois estão sempre vinculadas à evolução de algum índice de preços, denominado de indexador econômico ou de correção monetária. Desta forma, a taxa de juros pós-fixada corresponde à taxa de juros real completamente separada da inflação. As operações financeiras com juros pós-fixados permitem o conhecimento prévio, no momento da aplicação, apenas da taxa de juros real que irá remunerar o capital investido, uma vez que a taxa de juros total somente será conhecida ao final da operação, quando da divulgação do indexador escolhido.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 20

A aplicação de um capital pode ser realizada à taxa de juros de 32% a.a., pré-fixada, ou à taxa de juros real de 20% a.a., mais correção monetária pós-fixada. Escolha a melhor alternativa.

- Inflação embutida: $\pi = (1{,}32 / 1{,}20) - 1 = 0{,}10 \Rightarrow 10\%$ a.a.
- A escolha dependerá da inflação futura:

$\pi < 10\%$ - aplicar à taxa pré-fixada, pois a correção embutida na taxa será maior que a inflação verificada. ☜

$\pi = 10\%$ - aplicar à qualquer uma das duas taxas, pois ambas oferecerão a mesma remuneração. ☜

$\pi > 10\%$ - aplicar à taxa pós-fixada, pois a correção embutida na taxa será menor que a inflação verificada. ☜

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 21

Qual a rentabilidade que tornaria o investimento em um CDB pré-fixado de 90 dias equivalente a um CDB pós-fixado pelo IGPM, também de 90 dias, que remunerasse à taxa de 8,4% a.a.? Considere a operação ocorrendo nos 3 primeiros meses de 1996, cujas variações do IGPM são, respectivamente, 1,73%,0,97% e 0,40%.

- A utilização da expressão (14) permite se conhecer a remuneração final do CDB pós-fixado, que deve equivaleria ao CDB pré-fixado:

$i_A = [\ (1{,}084)^{90/360} \ .\ (1{,}0173\ .\ 1{,}0097\ .\ 1{,}0040)\ ] - 1 = 1{,}0523$ (para 90 dias)

$\Rightarrow (1{,}0523)^{360/90} - 1 = 0{,}2261 \Rightarrow 22{,}61\%$ a.a. ☜

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 22

Um CDB adquirido em 02/01/95 remunera à taxa de 18% a.a., acrescido da variação do IGPM. Calcule seu preço unitário em 02/04/95, sabendo-se que as variações do IGPM nos meses de janeiro, fevereiro e março foram, respectivamente, de 0,92%, 1,39% e 1,12%.

- Para uma aplicação de R$ 1, utiliza-se a expressão (14) para corrigir o valor e para aplicar a taxa de juros real equivalente para o prazo de 90 dias:

$i_A = [\ (1{,}18)^{90/360} \ .\ (1{,}0092\ .\ 1{,}0139\ .\ 1{,}0112)\ ] - 1 = 1{,}0784 \Rightarrow$ R$ 1,0784 ☜

2.2.11 Sistemas de Amortização

Quando se contrai um empréstimo ou se recorre a um financiamento, evidentemente, o valor recebido nesta operação, ou seja, o principal, terá que ser restituído à respectiva instituição financeira, acrescido da sua remuneração, que são os juros.

As formas de devolução do principal mais juros são denominadas de Sistemas de Amortização. Os Sistemas de Amortização mais utilizados são apresentados a seguir, complementados por exemplos numéricos. (Hirschfeld, 1984)

2.2.11.1 Sistema Francês de Amortização - PRICE

Este sistema também é conhecido como ***Sistema Price*** e é muito utilizado em todos os setores financeiros, principalmente nas compras a prazo de bens de consumo, através do crédito direto ao consumidor.

No Sistema Price, as prestações são iguais e sucessivas, onde cada prestação é composta por duas parcelas: juros e amortização do capital; cujo cálculo baseia-se numa série uniforme de pagamentos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 23

Calcular os valores das parcelas de juros e amortizações referentes a um empréstimo de R$ 100.000, pelo sistema PRICE, a uma taxa de 5 % a.m. e prazo de 5 meses.

- amortização igual à subtração prestação e juros: A = R - J
- cálculo da prestação pela fórmula (8):
  $R = 100.000 \ . \ \{[0,05.(1+0,05)^5] / [(1+0,05)^5 - 1]\} = 23.097,48$ ☜
- juros no 1º mês pela fórmula (1), sobre o saldo devedor:
  $J_1 = 100.000 \ . \ 1 \ . \ 0,05 = 5.000$ (e assim por diante) ☜

Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	100.000,00			
1	81.902,52	18.097,48	5.000,00	23.097,48
2	62.900,17	19.002,35	4.095,13	23.097,48
3	42.947,69	19.952,47	3.145,01	23.097,48
4	21.997,60	20.950,10	2.147,38	23.097,48
5	0,00	21.997,60	1.099,88	23.097,48

2.2.11.2 Sistema de Amortização Constante - SAC

Este sistema é muito utilizado em financiamentos internacionais de bancos de desenvolvimento e no sistema financeiro de habitação brasileiro, bem como em financiamentos de longos prazos.

As prestações do Sistema SAC são sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, cujo valor de cada prestação é composto por uma parcela de juros e outra de amortização constante do capital.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 24

Calcular os valores das parcelas de juros e amortizações referentes a um empréstimo de R$ 100.000, pelo sistema SAC, a uma taxa de 5 % a.m. e prazo de 5 meses.

- prestação igual à soma da amortização e juros: R = A + J
- cálculo da amortização constante: A = 100.000 / 5 = 20.000 ☜
- juros no 1º mês pela fórmula (1), sobre o saldo devedor:
  J_1 = 100.000 . 1 . 0,05 = 5.000 (e assim por diante) ☜

Mês	Saldo Devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	100.000,00			
1	80.000,00	20.000,00	5.000,00	25.000,00
2	60.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
3	40.000,00	20.000,00	3.000,00	23.000,00
4	20.000,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
5	0,00	20.000,00	1.000,00	21.000,00

2.2.11.3 Sistema Americano de Amortização

Neste sistema, paga-se apenas os juros durante o período do empréstimo e o principal é amortizado ao final da operação. Trata-se um sistema utilizado em operações de curto prazo.

2.2.11.4 Sistema de Pagamento Único

Este é o sistema mais simples e é muito utilizado para financiamentos industriais de capital de giro. O tomador simplesmente paga os juros e amortiza o principal no final do empréstimo.

2.3 Métodos para Análise de Fluxos de Caixa

A análise econômico-financeira e a decisão sobre a viabilidade do fluxo de caixa de um projeto de investimento isolado, ou de vários projetos, exige o emprego de métodos, critérios e regras que devem ser obedecidas. Apesar de não existir um critério único, unanimemente aceito pelos empresários, acionistas, órgãos e instituições de financiamento e meio acadêmico (Contador, 1981), este capítulo apresentará um resumo dos dois indicadores mais utilizados na análise e seleção de projetos de investimentos, bem como as respectivas considerações sobre as vantagens e desvantagens de cada um.

A análise de fluxos de caixa de projetos de investimentos requer abordagens multidisciplinares e possibilita a utilização de inúmeros métodos e técnicas matemáticas, econômicas e da pesquisa operacional, e os indicadores apresentados a seguir invariavelmente estão presentes nesse processo.

2.3.1 Taxa Mínima de Atratividade

Conceitualmente, a Taxa Mínima de Atratividade - TMA, também denominada de taxa de desconto ou de custo de oportunidade do capital, pode ser definida como a taxa de juros que o capital seria remunerado numa outra melhor alternativa de utilização, além do projeto em estudo. Em outras palavras, para um órgão de fomento ou instituição de financiamento, o custo de investir certo capital num projeto corresponde ao possível lucro perdido pelo fato de não serem aproveitadas outras alternativas de investimento viáveis no mercado.

Existem várias correntes metodológicas e estudos empíricos para a determinação da taxa de desconto, descritas detalhadamente num capítulo do trabalho de Contador (1981).

A partir de trabalhos realizados, pode-se concluir, razoavelmente, que a taxa social de desconto no Brasil oscila, em média entre 12 e 18% ao ano. Isto não exclui, no entanto, a possibilidade de que a taxa de desconto se modifique ao longo do tempo e que sofra alguns ajustes para diferentes níveis de risco de projetos alternativos.

Na prática, em análise financeira de projetos de investimentos, a taxa mínima de atratividade, ou taxa de desconto pode tomar como base a remuneração real da Caderneta de Poupança, dos Certificados de Depósitos Bancários, dos Fundos de Renda Fixa etc.

2.3.2 Valor Presente Líquido - VPL

O Valor Presente Líquido - VPL, também chamado Valor Atual Líquido, pode ser considerado um critério mais rigoroso e isento de falhas técnicas e, de maneira geral, o melhor procedimento para comparação de projetos diferentes, mas com o mesmo horizonte de tempo.

Este indicador é o valor no presente ($t=0$) que equivale a um fluxo de caixa de um projeto, calculado a uma determinada taxa de desconto. Portanto, corresponde, à soma algébrica das receitas e custos de um projeto, atualizados a uma taxa de juros que reflita o custo de oportunidade do capital. Assim sendo, o projeto será viável se apresentar um VPL positivo e na escolha entre projetos alternativos, com mesmo horizonte de tempo, a preferência recai sobre aquele com maior VPL positivo.

O VPL de um fluxo de caixa pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\text{VPL} = \sum_{t=0}^{n} F_t \,/\, (1 + i)^t \qquad \textbf{(15)}$$

onde $\mathbf{F_t}$ indica o fluxo de caixa líquido do projeto, no período **t**.

Se o valor do VPL for positivo, então a soma na data 0 de todos os capitais do fluxo de caixa será maior que o valor investido. Como se trabalha com estimativas futuras de um projeto de investimento, pode-se dizer que o capital investido será recuperado, que será remunerado à taxa de juros que mede o custo de oportunidade do capital e que o projeto irá gerar um lucro extra, na data 0, igual ao VPL. (Lapponi, 1996)

Portanto, o critério do VPL estabelece que enquanto o valor presente das entradas for maior que o valor presente das saídas, calculados com a T.M.A., que mede o custo de oportunidade do capital, o projeto deve ser aceito.

- **VPL > 0 ➪ o projeto deve ser aceito;**
- **VPL = 0 ➪ é indiferente aceitar ou rejeitar projeto;**
- **VPL < 0 ➪ o projeto deve ser rejeitado.**

Talvez a única desvantagem deste indicador seja a dificuldade da escolha da taxa de desconto ou taxa mínima de atratividade. Os pontos fortes do VPL são a inclusão de todos os capitais do fluxo de caixa e o custo do capital, além da informação sobre o aumento ou decréscimo do valor da empresa.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 25

Determine o VPL, considerando uma taxa de desconto de 8% ao ano, do Projeto Y, cujo fluxo de caixa é mostrado abaixo.

ANO	FLUXO DE CAIXA
0	- 1.000.000
1	200.000
2	200.000
3	200.000
4	400.000
5	500.000

- utilizando-se a fórmula (15):
  VPL = - 1.000.000 + 200.000 $(1,08)^{-1}$ + 200.000 $(1,08)^{-2}$ + 200.000 $(1,08)^{-3}$ + 400.000 $(1,08)^{-4}$ + 500.000 $(1,08)^{-5}$ = 149.722,94 ☜

O conceito de equivalência financeira é de fundamental importância no raciocínio do VPL, pois dois ou mais fluxos de caixa de mesma escala de tempo são equivalentes quando produzem idênticos valores presentes num mesmo momento, calculados à mesma taxa de juros.

Em resumo, para que se possa avaliar alternativas de investimentos, propostas de compra ou venda é indispensável a comparação de todos os fatores em uma mesma data, ou seja, proceder o cálculo do VPL do fluxo de caixa em questão.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 26

Determine o VPL, considerando uma taxa de desconto de 12% ao ano, do Projeto A, cujo fluxo de caixa é mostrado abaixo.

ANO	PROJETO A	PROJETO B	PROJETO C
0	- 40.000	- 50.000	- 30.000
1	10.000	12.000	8.000
2	10.000	12.000	8.000
3	13.000	16.000	10.000
4	13.000	16.000	10.000
5	13.000	16.000	10.000

- utilizando-se a fórmula (15):

  VPL_A = - 40..000 + 6.000 $(1{,}12)^{-1}$ + 8.000 $(1{,}12)^{-2}$ + 10.000 $(1{,}12)^{-3}$ + 10.000 $(1{,}12)^{-4}$ + 12.000 $(1{,}12)^{-5}$ = 1.791,94

  VPL_B = - 50.000 + 10000 $(1{,}12)^{-1}$ + 10.000 $(1{,}12)^{-2}$ + 12.000 $(1{,}12)^{-3}$ + 12.000 $(1{,}12)^{-4}$ + 15.000 $(1{,}12)^{-5}$ = 916,22

  VPL_C = - 30.000 + 6.000 $(1{,}12)^{-1}$ + 6.000 $(1{,}12)^{-2}$ + 8.000 $(1{,}12)^{-3}$ + 8.000 $(1{,}12)^{-4}$ + 10.000 $(1{,}12)^{-5}$ = 2.667,66 ☜

- O projeto C é o mais viável porque apresenta o maior VPL, à 12% a.a.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 27

Determinar a melhor alternativa para o recebimento pela venda de um equipamento dentre as seguintes opções: (a) 30% no pedido; 30% na entrega, após 2 meses; e o saldo em 2 parcelas mensais iguais, após a entrega; (b) 20% no pedido; 40% na entrega, após 2 meses; e 40% 2 meses após a entrega. Considerar uma T.M.A. de 3% a.m.

- Comparar ambos os fluxos de caixa em t =0, à taxa de 3% a.m.:

  (a) $VPL_a = 30 + 30 / (1{,}03)^2 + 20 / (1{,}03)^3 + 20 / (1{,}03)^4 = 94{,}35$ ☜

  (b) $VPL_b = 20 + 40 / (1{,}03)^2 + 40 / (1{,}03)^4 = 93{,}24$

Na análise realizada com o método do VPL, todos os dados que participam do seu cálculo são estimativas, pois o objetivo é a medição da potencialidade de uma idéia, na tentativa de se antecipar bons resultados no futuro. Nessa análise deve-se considerar que o valor da taxa de juros permanecerá constante durante a duração do projeto;

entretanto, esse cenário é uma simplificação da realidade que deverá operar com taxas variáveis de juros. O risco associado com a variabilidade do custo de capital pode ser analisado a partir de uma análise de sensibilidade do valor do VPL em função da taxa de juros i, conforme mostrado na figura 6. Será tomado como base o fluxo de caixa do Exercício Resolvido nº 25, que é um fluxo de caixa convencional, ou seja, aquele em que os investimentos antecedem as receitas líquidas do projeto, havendo, portanto, apenas uma inversão de sinal.

i	VPL
0%	500.000,00
4%	307.903,44
8%	149.722,94
12%	18.286,91
16%	- 91.849,15
20%	- 184.863,68

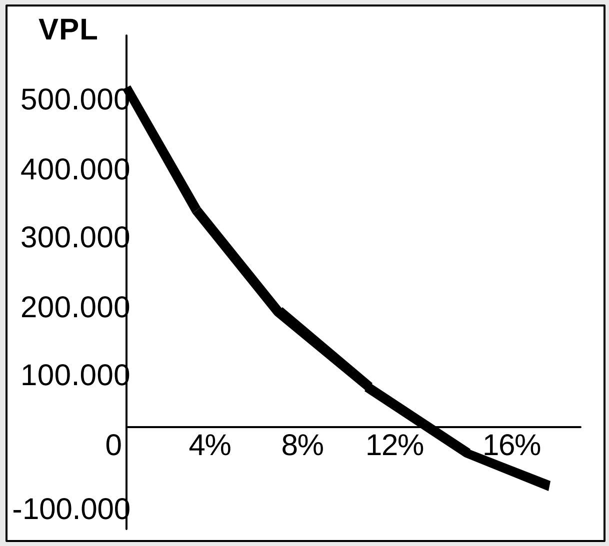


FIGURA 6 - Análise de Sensibilidade: VPL = f(i)

2.3.3 Série Uniforme Líquida - SUL

O método da Série Uniforme Líquida (SUL) transforma todas as entradas e saídas de um fluxo de caixa numa série uniforme de pagamentos equivalente, indicando, assim, o valor resultante líquido, de benefícios ou custos, por período, do projeto considerado.

A formulação matemática para o cálculo da SUL é função do VPL, conforme a expressão abaixo, que desagrega o VPL em valores periódicos, iguais e sucessivos, positivos ou negativos, conforme o caso:

$$\mathrm{SUL} = \frac{i\,.\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \,.\, \sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} \qquad (16)$$

onde $\mathbf{F_t}$ indica o fluxo resultante líquido do projeto, no período **t**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 28

Determine a SUL do fluxo de caixa do projeto do Ex. Res. nº 25, também a 8 % a.a.

- aproveitando o cálculo do VPL da Figura 5:

SUL = 149.722,94 . (P/R,8%,5) = 149.722,94 . 0,2505 = 37.499,08 ☜

Particularmente nos casos de comparação entre projetos com variações apenas nos custos, o SUL é denominado de Custo Anual Uniforme (CAU), uma vez que as receitas e benefícios são consideradas iguais para todas as alternativas. O CAU indica, desta forma, o valor do custo líquido do projeto, por período do horizonte de estudo, que não precisa ser necessariamente anual, podendo ser semestral, trimestral, mensal etc. A denominação de Custo Anual Uniforme deve-se ao fato de que a maioria dos grandes projetos de investimento são analisados a partir de fluxos de caixa divididos em períodos anuais.

São válidas as mesmas considerações efetuadas para o método do VPL e, na comparação entre projetos, a alternativa que apresentar a maior SUL positiva será a preferível. No caso do CAU, deve ser escolhida a alternativa de menor valor absoluto deste indicador como a mais viável financeiramente.

QUADRO 4 - Fluxo de Caixa do Projeto Z

	FLUXO DE CAIXA
0	- 2.500.000
1	- 700.000
2	- 800.000
3	- 800.000
4	- 900.000
5	- 900.000

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 29

Determine o CAU do fluxo de caixa do Projeto Z do quadro 5, a 10 % a.a.

- utilizando-se a fórmula (16):

CAU = [-2.500.000 -700.000$(1,10)^{-1}$ - 800.000$(1,10)^{-2}$ - 800.000$(1,10)^{-3}$ - 900.000$(1,10)^{-4}$ - 900.000$(1,10)^{-5}$] . (P/R,10%,5) = -5.572.113,80 . 0,2638 = -1.469.909,58 ☜

2.3.4 Taxa Interna de Retorno - TIR

A Taxa Interna de Retorno - TIR, ou simplesmente Taxa de Retorno, é a taxa de desconto que eqüaliza o valor presente dos benefícios/receitas e dos custos/despesas de um projeto de investimento. Trata-se de um indicador de larga aceitação e um dos mais utilizados como parâmetro de decisão.

A TIR de um determinado projeto é a taxa de juros **i*** que satisfaz a equação:

$$\sum_{t=0}^{n} F_t \,/\, (1 + i^*)^t = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

O grau desta equação está relacionado com o horizonte de planejamento do projeto, acarretando o aparecimento de equações com grau maior que 2, cuja solução algébrica é extremamente complexa. O problema pode ser resolvido por processos iterativos de tentativa e erro, determinando-se um VPL positivo e outro negativo, correspondente às duas taxas de juros tomadas arbitrariamente. A seguir, procede-se a interpolação linear desses valores para o VPL nulo, encontrando-se, assim, a taxa interna de retorno desejada. (Oliveira, 1982)

A figura 7 utiliza o gráfico da figura 6 para apresentar a visualização do conceito da TIR, para um caso de fluxo de caixa convencional.

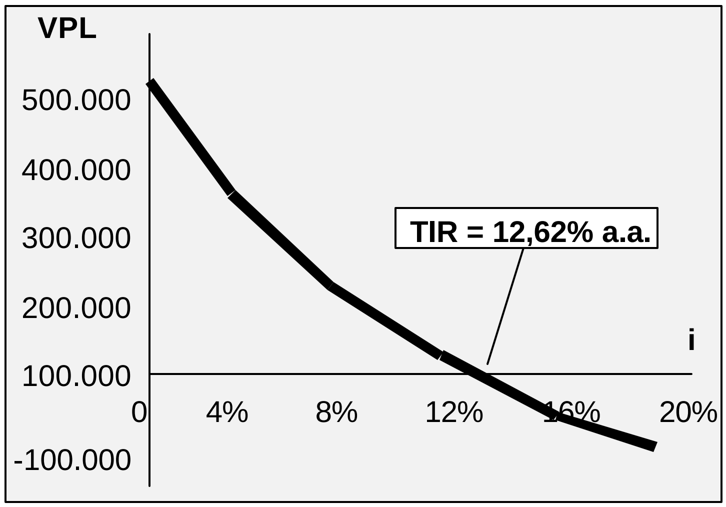


FIGURA 7 - Taxa Interna de Retorno - TIR

Um projeto de investimento será considerado viável, segundo este critério, se sua TIR for igual ou maior ao custo de oportunidade dos recursos para sua implantação. Assim, quanto maior a TIR, maior a atratividade do projeto.

- **TIR > TMA ⇨ o projeto deve ser aceito;**
- **TIR = TMA ⇨ é indiferente aceitar ou rejeitar projeto;**
- **TIR < TMA ⇨ o projeto deve ser rejeitado.**

A TIR não é critério para comparação entre alternativas, embora possa parecer intuitivo que a alternativa de maior TIR remunera melhor o capital investido e, portanto, deve ser a escolhida.

Como existem algumas restrições ao seu emprego, a TIR somente deve ser utilizada nos seguintes casos: (Contador, 1981)

- quando os projetos possuírem dois ou mais períodos e tiverem seus investimentos antecedendo os benefícios;
- quando a comparação ocorrer entre projetos mutuamente exclusivos e com a mesma escala de tempo;
- como critério básico para ordenação de projetos com restrições orçamentárias;
- como recurso para se conhecer a taxa de juros envolvida num financiamento.

A maior vantagem do método da TIR é apresentar como resultado o valor de uma taxa de juros, caracterizando-se como um indicador de rentabilidade, enquanto o método do VPL pode ser considerado como um indicador de lucratividade.

Um fluxo de caixa convencional, cujos investimentos antecedem as receitas líquidas, ou seja, no qual existe apenas uma inversão de sinal, existirá somente uma única TIR. No caso de fluxos de caixa não convencionais, com mais de uma inversão de sinal, poderá existir mais de uma TIR, ou seja, TIR múltiplas.

No caso de fluxos de caixa que apresentarem mais de uma TIR, não é correto se utilizar o critério da TIR, pois se perderá o sentido da análise, uma vez que pode haver divergência na indicação da viabilidade do projeto quando da comparação das várias TIR com a TMA. Neste caso, recomenda-se a utilização o método do VPL.

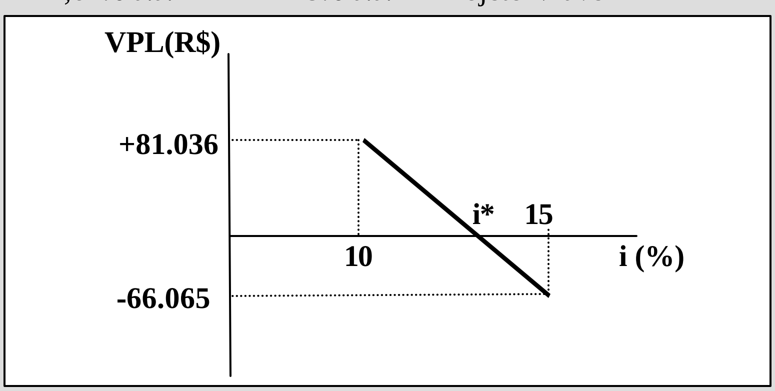
Preconiza-se que para o cálculo da TIR não há necessidade de uma taxa de desconto, ponto inicial ao método do VPL. Isto, no entanto, é totalmente ilusório. A decisão de aceitar ou rejeitar um projeto, com base na TIR, tem como critério a sua comparação com uma mínima taxa de retorno aceitável. Ora, esta taxa mínima, na realidade, é a taxa de desconto para o método do VPL, o que invalida a afirmativa da não necessidade de uma taxa de atratividade, quando do uso da TIR.

Em resumo, o VPL é a quantia máxima que se poderia elevar o custo do investimento hoje, para que esse ainda continuasse viável. Já a TIR é a taxa de desconto para o qual o VPL de um projeto é igual a zero. Para o caso onde a TIR existe e é única, pode ser vista como a maior taxa de juros que pode ser paga se todos os recursos necessários fossem obtidos via empréstimo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO Nº 30

Determine a TIR do fluxo do Projeto A do Exercício Resolvido nº 25 e verifique a sua atratividade, sabendo-se que a TMA é igual a 8% a.a.

- Inicialmente, arbitra-se uma taxa de juros de 10% a.a. O VPL para esta taxa é de R$ 81.036,44. Como este VPL é positivo, arbitra-se uma outra taxa de juros maior, tal como 15% a.a., chegando-se ao VPL negativo de R$ 66.065,31. Por interpolação linear o valor da TIR corresponde a 12,75% a.a. Entretanto, utilizando-se uma calculadora eletrônica, o valor exato da TIR é igual a 12,62% a.a. Esta diferença ocorreu pela suposição da ligação linear entre os pontos do gráfico, quando, na realidade, tal ligação segue uma função exponencial. A calculadora realiza a operação por aproximações sucessivas, até encontrar o resultado desejado.
- TIR = 12,62% a.a. > TMA = 8% a.a. ⇨ Projeto Viável



2.4 Exercícios Propostos

2.4.1. Se um banco oferece uma taxa de 12% ao mês no regime de juros simples, quais os juros e o capital formado para uma aplicação de R$50.000,00, por 42 dias?
Resp.: R$ 8.400,00 e R$ 58.400,00

2.4.2. Qual a taxa de juros mensal que transformou uma aplicação de R$200,00 em R$250,00 após 45 dias de prazo, no regime de juros simples?
Resp.: 16,67% a.m.

2.4.3. Um investidor aplicou R$200.000,00 a uma taxa de 3% a.m., durante determinado período. Ao encerrar esta primeira operação, os juros foram resgatados e os R$200.000,00 mantidos aplicados, desta vez a uma taxa de 5% a.m. Sabendo-se que 20 meses após a primeira aplicação o valor total dos juros recebidos foi de R$168.000,00, determine o valor dos juros e o prazo de cada operação, no regime de juros simples.
Resp.: R$48.000,00 e R$120.000,00; 8 e 12 meses

2.4.4. Qual a taxa de juros mensal que transformou uma aplicação de R$1.000,00 em R$1.254,40, após 2 meses?
Resp.: 12% a.m.

2.4.5. Determine as taxas de juros semestrais, trimestrais, mensais e diárias equivalentes a 70%a.a.
Resp.: 30,38% a.s.; 14,19% a.t.; 4,52% a.m.; 0,1475 a.d.

2.4.6. Um capital de R$152.000,00 foi aplicado a uma taxa de 8% a.m. por 8 meses. Qual o montante gerado ao final do período?
Resp.: 328.156,60

2.4.7. Em quanto tempo R$100,00 aplicados a 14% a.m. transformam-se em R$150,00?
Resp.: 3,09 meses (4 meses, na HP-12C)

2.4.8. Você irá adquirir os títulos A, B e C, cujos valores de resgate são R$500.000,00, R$950.000,00 e R$1.200.00,00, e os prazos de resgate são de 6, 9 e 12 meses, respectivamente. Sabendo-se que a taxa oferecida para estes tipos de aplicação é de 9% a.m., represente o fluxo de caixa da operação e calcule o total de deverá ser aplicado hoje.
Resp.: R$1.162.181,72

2.4.9. Um financiamento no valor de R$1.500,00 deverá ser quitado em 10 prestações mensais e sucessivas, a primeira com vencimento 30 dias após a liberação dos recursos. Calcule o valor da prestação, admitindo que a financeira esteja cobrando 12% a.m. de taxa de juros.
Resp.: R$265,48

2.4.10. Quantas prestações bimestrais e iguais a R$500,00 serão necessárias para a formação de um montante de R$3.882,23? Considere uma taxa mensal de 5% e a última prestação coincidente com a data em que os R$3.882,23 estarão disponíveis.
Resp.: 6

2.4.11. Um financiamento de R$1.000,00 deverá ser quitado em três parcelas iguais a R$600,00, sem entrada. Determine o valor da taxa de juros mensal da operação.
Resp.: 36,31% a.m.

2.4.12. Determine a taxa efetiva anual correspondente a 24% a.a. se a capitalização dos juros for: anual, semestral, mensal e diária.
Resp.: 24% a.a.; 25,44% a.a.; 26,82% a.a.; 27,11% a.a.

2.4.13. Se medida por um determinado índice, a taxa de inflação acumulada em março foi de 8% e a de abril de 9,05%, qual a inflação para o mês de abril?
Resp.: 0,97%

2.4.14. Os últimos 6 meses de um determinado ano apresentaram os seguintes percentuais de inflação: 0,52%, 0,87%, 0,66%, 1,02%, 0,98% e 1,15%. Determine a inflação acumulada e a inflação média mensal do semestre em questão.
Resp.: 5,31%; 0,866% a.m.

2.4.15. Você adquiriu um bem no valor de R$36.000,00, financiando-o pelo Sistema Price. Admitindo que a transação tenha sido feita sem entrada e em 8 prestações, com uma taxa de juros mensal de 4% a.m., calcule o valor da prestação, o valor dos juros acumulados pagos até o 4º mês, inclusive, e o saldo devedor após o pagamento da 5ª parcela.
Resp.: R$5.347,00; R$4.797,07; R$14.838,42

2.4.16. Qual a taxa real de juros anual que deveria remunerar um título pós-fixado pelo IGPM de tal forma que fosse indiferente aplicarmos neste título ou em outro pós-fixado pelo IPC que rendesse 15% a.a. Admita que o horizonte de planejamento seja de 1 ano, ao longo de 1995 e os números-índices são: $IPC_{dez/94}$=135,89; $IPC_{dez/95}$=171,10; $IGPM_{dez/94}$= 158,11; $IGPM_{dez/95}$=182,20.
Resp.: 25,65% a.a.

2.4.17. Montar o esquema de pagamentos do seguinte empréstimo:
- Valor: R$ 200.000;
- Taxa de Juros: 4,5 % a.m.;
- Carência: 6 meses, sem pagamento de juros;
- Amortização: PRICE, com prazo de 12 meses.

2.4.18. Uma empresa contraiu um empréstimo de R$ 80.000,00 pelo sistema PRICE, à taxa de 3,75% a.m., por 8 meses. Ao pagar a 3ª parcela, a empresa renegociou o saldo devedor pelo sistema SAC, à taxa de 4% a.m., por mais 8 meses. Calcule o total de juros pagos ao final dos empréstimos.
Resp.: 17.492,26

2.4.19. Determinar o VPL e a TIR dos projetos de investimentos representados pelos fluxos de caixa abaixo, para as seguintes taxas de atratividade: 5, 10, 15 e 20% a.a. Montar um quadro comparativo e indicar o projeto mais viável.

Resp.: Para a taxa de 5%: VPL_A= 70.946,59; VPL_B = 56.072,18;
VPL_C = 120.255,49. TIR_A = 32,77% a.a.; TIR_B = 32,96% a.a.;
TIR_C = 62,74% a.a.

ANO	PROJETO A	PROJETO B	PROJETO C
0	**-75.000**	**-60.000**	**-50.000**
1	**30.000**	**25.000**	**30.000**
2	**30.000**	**25.000**	**30.000**
3	**30.000**	**25.000**	**40.000**
4	**40.000**	**25.000**	**40.000**
5	**40.000**	**35.000**	**60.000**

2.4.20 Um imóvel foi comprado em certa época por R$35.000,00 e vendido 8 meses mais tarde por R$50.000,00. Calcule a taxa de juros real média, em % a.m., auferida na transação, sabendo-se que os índices gerais de preços para os períodos da compra e da venda são, respectivamente, 156,87 e 208,58.

Resp.: 0,90% a.m.

2.4.21 Calcular a taxa efetiva anual de um empréstimo numa financeira que deseja ganhar 8% a.a. de juros reais, sabendo-se que a inflação está prevista em 12% a.a.

Resp.: 20,96% a.a.

2.4.22 Uma pessoa depositou R$50.000,00 numa caderneta de poupança (0,5%a.m. + DTR). Considerando-se que a aplicação ocorreu em março de 1997, determine o saldo desta poupança em outubro de 1997, para uma variação da TR de 4,632% no período.

Resp.: 54.174,76

2.4.23 Em março de 1997, uma loja de eletrodomésticos estava oferecendo um determinado aparelho de televisão, à vista, por R$ 1.250,00, ou financiado, com 25% de entrada e 3 parcelas mensais e iguais de R$ 345,00. Calcule a taxa de juros real mensal implícita para o período deste financiamento (considerar os índices da Coluna 2 do IGP/FGV para março, abril, maio e junho, respectivamente, 138,990, 139,807, 140,229 e 141,207)

Resp.: 3,46% a.m.

2.4.24 Um investidor aplicou R$ 12.000,00, no mês 0, e resgatou R$ 16.000,00, no mês 20. Sabendo-se a inflação no período foi de 15,89%, calcule a rentabilidade mensal média da operação e verifique se foi uma boa aplicação (considere a caderneta de poupança como a T.M.A. do investidor).

Resp.: 0,70% a.m.

2.4.25 Um título pré-fixado é emitido pelo prazo de 6 meses pagando juros aparentes de 9,5% a.s. Para um investidor que deseja obter um ganho real de 1,0% a.m., qual deve ser o valor máximo de correção monetária no semestre?
Resp.: 3,15%

2.4.26 Para uma inflação de 2.467,58%, num determinado ano, calcule a taxa média equivalente mensal.
Resp.: 31,06% a.m.

2.4.27 Sendo de 11,8% a taxa de desvalorização da moeda em determinado período, calcule a inflação que determinou este resultado negativo no poder de compra da moeda.
Resp.: 13,38%

2.4.28 Considere o seguinte fluxo de caixa: 1 saída de caixa de R$2.500 (em t=0); 5 entradas mensais de R$500 (a 1ª em t =1) e 7 entradas mensais de R$800 (a 1ª em t=6). Para uma T.M.A. de 10% a.a., determine o VPL e a TIR do fluxo em questão.
Resp.: R$ 1.813,72 / 21,43% a.a.

2.4.29 Um projeto exige um investimento de R$ 100.000,00 na data 0. Antes de receber o fluxo de caixa, o diretor financeiro gostaria de conhecer o valor mínimo dos retornos futuros durante 5 anos que conseguiriam que o valor do VPL fosse igual a zero, considerando que o custo de capital é igual a 10% a.a.
Resp.: R$ 26.379,75

2.4.30 O quadro abaixo apresenta 4 propostas de compra de um equipamento com vida útil de 5 anos. Considerando-se uma T.M.A. de 12% a.a., determine o VPL e a TIR de cada alternativa, que são mutuamente exclusivas, e indique qual a melhor opção de compra:
Resp.: R$8.838,21 / 28,65% a.a.; R$8.431,05 / 32,87% a.a.;
R$9.802,93 / 57,37% a.a.; R$ 8.744,84 / 43,43% a.a.

Proposta	Investimento Inicial	Receitas Líquidas Anuais
A	20.000	8.000
B	15.000	6.500
C	7.500	4.800
D	10.000	5.200

2.5 Referências Bibliográficas

ABREU, P. F. S. P. e STEPHAN, C., **Análise de Investimentos**, Rio de Janeiro, Editora Campus, , 1982.

ASSAF NETO, A., **Matemática Financeira e suas Aplicações**, São Paulo, Editora Atlas, 1994.

COSTA, P. H. S. e ATTIE, E. V., **Análise de Projetos de Investimento**, Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, 1990.

EHRLICH, P.T., **Engenharia Econômica**, São Paulo, Ed. Atlas, 1986.

FLEISCHER, G. A., **Teoria da Aplicação do Capital: Um Estudo das Decisões de Investimento**, São Paulo, Ed. Edgard Blücher, 1973.

HIRSCHFELD, H., **Engenharia Econômica**, São Paulo, Atlas, 1984.

KUHNEN, O. L. e BAUER, U. R**., Matemática Financeira Aplicada e Análise de Investimentos**, São Paulo, Editora Atlas, 1996.

LAPPONI, J. C., **Matemática Financeira usando EXCEL**, São Paulo, Lapponi Treinamento e Editora, 1995.

LAPPONI, J. C., **Avaliação de Projetos de Investimento**, São Paulo, Lapponi Treinamento e Editora, 1996.

MATHIAS, W. F. e GOMES, J. M., **Matemática Financeira**, São Paulo, Atlas, 1995.

OLIVEIRA, J. A. N., **Engenharia Econômica: Uma Abordagem às Decisões de Investimento**, São Paulo, Mc Graw-Hill do Brasil, 1982.

PUCCINI, A. L., **Matemática Financeira Objetiva e Aplicada**, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1995.

THUESEN, H.G., **Engeneering Economy**, New Jersey, Prentice Hall, 1977.

ZENTGRAF, R., **Matemática Financeira Objetiva**, Rio de Janeiro, Editoração Editora, 1997.